ONM-Etapa locală 15.02.2015

Solutii si bareme CLASA A XI-A

Problema 1.

a) Presupunem că ecuația are soluții,deci există X astfel incât $X^2 = A$. Prin ridicare la pătrat obținem $X^4 = A^2$, dar $A^2 = O_2$ deci $X^4 = O_2$(2p)
$X^4 = O_2 \Rightarrow \det(X) = 0 \Rightarrow X^2 = tX\left(t = Tr(X)\right) \Rightarrow X^4 = t^3 X = O_2$ iar de aici avem $t = 0 \Rightarrow X^2 = O_2$ sau $X = O_2$(1p)deci, în ambele cazuri $X^2 = O_2$ în contradicție cu $X^2 = A$(1p)

b) Avem $Tr(A) = 3, \det(A) = -4$ Avem ecuația valorilor proprii $x^2 - 3x - 4 = 0$ cu rădăcinile -1,4 deci există matricile B,C astfel incât $A^n = (-1)^n B + 4^n C, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru n=1,2 obținem sistemul $\begin{cases} -B + 4C = A \\ B + 16C = A^2 \end{cases}$ cu soluția $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ iar de aici obținem ce se cerea. (3p)

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6\cdot 4^n - (-1)^n & 3\cdot 4^n - 3(-1)^n \\ -2\cdot 4^n + 2(-1)^n & -4^n + 6(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Se verifică prin calcul că pentru orice matrice $A \in M_3(\mathbb{C})$ și pentru orice $x \in \mathbb{C}$ avem $\det(A + xI_3) = \det(A) + \alpha x + \beta x^2 + x^3$.(1) Folosind (1) ipoteza este echivalentă cu $\alpha + 3\beta + 7 = 0$(2),iar membrul stâng al concluziei devine

$$m_s = 2\left(\det(A) + \alpha + \beta + 1\right) + \left(\det(A) - \alpha + \beta - 1\right) + 6 =$$
$$3\det(A) + \alpha + 3\beta + 7 = 3\det(A) = m_d$$

ceea ce trebuia demonstrat(7p).

Problema 3 Relația se scrie $x_{n+1}{}^2 + 2x_{n+1} - x_n^2 - 2x_n \le 0$. Considerăm ecuația $t^2 + 2t - x_n^2 - 2x_n = 0; (t = x_{n+1})$ cu radacinile $t_{1,2} = -1 \pm |x_n + 1|$, rezultă folosind ipoteza $-1 - |x_n + 1| \le x_{n+1} \le -1 + |x_n + 1|$ sau $|x_{n+1} + 1| \le |x_n + 1|, \forall n$ deci sirul $(x_n)_{n \ge 1}$ este mărginit. Pentru calculul limitei folosind lema Stolz-Cesaro avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{2n+1} = 0.$$